ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಮೂಲ: **ವಿಶಾಖ್ ವಿಕ್ರಾಂತ್**

ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ 'ಸಮತೂಗಿಸುವ ಲೆಕ್ಕ' ಎಂಬುದೊಂದಿದೆ. m ಮತ್ತು n ಜೋಡಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. 1ರಿಂದ m-1ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು, m+1ರಿಂದ nವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ, m ಮತ್ತು nಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. (ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸಮತೂಗಿಸುವ ಲೆಕ್ಕ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ m ಎನ್ನುವುದು ಸಮತೋಲನ ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ). ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು *ಸ್ಟ್ರಾಂಡ್* ಎಂಬ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ನಿಯತಕಾಲಿಕದಲ್ಲಿ 1914ರ ಡಿಸೆಂಬರ್ ನಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಪ್ರಕಟಗೊಂಡಿತು. ಇದನ್ನು ಪಿ. ಸಿ. ಮಹಾಲನೊಬಿಸ್ ಎನ್ನುವವರು ಸತತ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದರು. ರಾಮಾನುಜನ್ ಇದಕ್ಕೊಂದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಅತಿ ಸರಳ ಪರಿಹಾರ ಹೀಗಿದೆ:

$$1+2+3+4+5 = 7+8$$

ಈ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ನಡುವಿನ ಪದ (ಸಮತೋಲನ ಬಿಂದು), m = 6 ಆಗಿದೆ ಹಾಗು ಜೋಡಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ n = 8 ಆಗಿದೆ.

ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಮತೂಗಿಸುವ ಲೆಕ್ಕ:

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಂತೆಯೇ *ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಮತೂಗಿಸುವ ಲೆಕ್ಕ*ವೊಂದನ್ನು ಈರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. 1ರಿಂದ m-1ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, m+1ರಿಂದ nವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ m ಮತ್ತು n (m < n) ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, m = 7 ಮತ್ತು n = 10 ಆದಲ್ಲಿ,

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 8 \times 9 \times 10$$

ಆಗಿರುವುದನ್ನು (ಎರಡೂ ಕಡೆ 720) ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಹಾಗಾಗಿ, m = 7 ಮತ್ತು n = 10 ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ. ಆದರೆ, ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಒಳಪಡುವ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹುಡುಕುವುದು

ಬಹಳ ತ್ರಾಸದಾಯಕ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಇನ್ನಾವ ಪರಿಹಾರಗಳೂ ಇಲ್ಲವಲ್ಲ! ಅಂದರೆ, ಪ್ರಸ್ತುತ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ (7,10) ಎಂಬೀ ಜೋಡಿಯೇ ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ.

ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ಸಾಧನೆ:

$m < 7$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, ಈ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು $m = 7$ ಮತ್ತು $n = 10$ ಈ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೊಂದು ಪರಿಹಾರವೆಂದು ಈಗಾಗಲೇ ಅರಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ, ಈ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿ $m > 7$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿ (m, n) ಇದೆ ಎಂದೇ ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ mಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಿರುವ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು p ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $p \geq 7$ ಆಗಬೇಕು. ಹಾಗಾಗಿ, 1ರಿಂದ $m-1$ ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ pನ ಗುಣಕ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸಮ-ತೂಗಿಸುವ ನಿಬಂಧಕ್ಕೆ m ಮತ್ತು n ಒಳಪಟ್ಟಿದ್ದೇ ಆದಲ್ಲಿ $m+1$ರಿಂದ n ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ pನ ಗುಣಕವೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದು ನಿಜ ಆಗಲು, $m+1$ರಿಂದ nವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ pನ ಗುಣಕ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ, p ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಂತರ ಬರುವ pನ ಗುಣಕವೂ ಆಗಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠದ್ದು 2p ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, $n \geq 2p$ ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ಬದಿಗಿರಿಸಿ ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಧಿತವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸೋಣ. $k \geq 2$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, k ಹಾಗು 2k ನಡುವೆ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ q ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ $(k < q < 2k)$ ಎಂಬ ವಿಷಯ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ *ಬರ್ಟ್ರಾಂಡ್ ನ ಪ್ರತಿಪಾದನೆ* ಎಂದು ಹೆಸರುವಾಸಿಯಾಗಿರುವ ಈ ಗಣನೀಯ ಸಾಧಿತವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಈ ತಾಣಕ್ಕೆ ಭೇಟಿನೀಡಿ:

https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand's_postulate .

ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾದ ಸಾಧಿತಗಳು ತಿಳಿದಿವೆ. $k \geq 6$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, k ಹಾಗು 2k ನಡುವೆ *ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು* q_1,q_2 ಇರುತ್ತವೆ ($k<q_1< q_2<2k$) ಎಂದು ರಾಮಾನುಜನ್ ತೋರಿಸಿದರು.

ಈಗ, ಮರಳಿ ನಮ್ಮ ಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಬರೋಣ. ರಾಮಾನುಜನ್ ರವರ ಈ ಸಾಧಿತವು p ಹಾಗು 2p ನಡುವೆ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು q_1,q_2 ಇರಬೇಕು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $q_1 = m$ ಆಗಬಹುದು. (m ಸ್ವತಃ ಅವಿಭಾಜ್ಯವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಈ ಇದು ಸಾಧ್ಯ. ಇಲ್ಲವಾದರೆ, $q_1 > m$ ಆಗುತ್ತದೆ). ಇದು ಏನೇ ಇದ್ದರೂ, ($q_2 > m$). ಹಾಗಾಗಿ, m+1ರಿಂದ nವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು q_2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು .

ಆದರೆ, 1ರಿಂದ m-1ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು q_2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, q_2 , mಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಿರುವ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ.. ಆದ್ದರಿಂದ, 1ರಿಂದ m-1ವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು m+1ರಿಂದ nವರೆಗಿನ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

ಹಾಗಾಗಿ, ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ $m = 7$ ಮತ್ತು $n = 10$ ಹೊರತಾದ ಇನ್ಯಾವ ಪರಿಹಾರವೂ ಇಲ್ಲ.

ವಿಶಾಖ್ ವಿಕ್ರಾಂತ್ ಅವರು ಬಿಜಿಎಸ್ ನ್ಯಾಶನಲ್ ಪಬ್ಲಿಕ್ ಸ್ಕೂಲಿನ 11ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ. ಇವರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಒಲವಿದ್ದು ಮುಂದೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತಿಯಾಗುವ ಗುರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು vishak20903@gmail.com ಇಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಗಣಿತದ ಮಗ್ಗಿ ಕಲಿಸಲು ಬಿಹಾರ್ ಶಿಕ್ಷಕಿಯ ನವೀನ ತಂತ್ರ

ಆನಂದ್ ಮಹೀಂದ್ರ, ಶಾರುಖ್ ಖಾನ್ ಅಂಥವರೇ ಓರ್ವ ಶಿಕ್ಷಕಿಯ ಅಭಿಮಾನಿಗಳಾದರು ಹೇಗೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿಲು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೊಂಡಿಯನ್ನು ಒತ್ತಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಸಿಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಈಕೆ ಬಿಹಾರದ ಬಂಕ ಎಂಬ ಪುಟ್ಟ ಹಳ್ಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸರಕಾರಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಕಿ. ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಉತ್ತಮ

ಗುಣಮಟ್ಟದ ಶಿಕ್ಷಣ ನೀಡುವ ಸರಕಾರದ ಯೋಜನೆಯ ಯಶಸ್ಸಿನ ದ್ಯೋತಕವೆಂಬಂತಿದೆ ಈ ಹೃದಯಂಗಮ ನಿದರ್ಶನ.

ಇಂಥದ್ದೇ ಹಲವು ಚಳಕಗಳ ಕುರಿತು ಓದುಗರು ಕಮೆಂಟ್ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತಪ್ರಿಯರಾದ ನಮ್ಮ ಓದುಗರು, ಆ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಿತ ತಂತ್ರಗಳು ಹೇಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕೂಡಲೆ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವವರೂ ಆಗಿರುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗಾಗಿ, ಇಂಥಾ ಆಕರ್ಷಕ ಗಣಿತದ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕಲಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದರ ಕುರಿತು ತಮ್ಮ ಅನಿಸಿಕೆಗಳನ್ನು ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ನಮ್ಮ ಓದುಗರನ್ನು ಕೋರುತ್ತೇವೆ. ನಿಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು AtRiA.editor@apu.edu.in ಇದಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಿರಿ.

https://www.hindustantimes.com/education/biharteacher-s-innovative-math-teaching-goes-viral-onsocial-media-srk-anand-mahindra-appreciate/storyPmdNIDGBYEp6pcK6wePOxM.htm